Etats d'A^{M}E

Journal de l'Association des Mathématiciens de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne - Numéro 9 - Oct. 2002

Le mot du Président

Chers membres,

Voici venu le temps de la rentrée universitaire, des lotos de clubs et des assemblées générales…

L'AME ne faillit pas à ses responsabilités. C'est ainsi que le comité a décidé d'apporter sa pierre à l'édifice.

Non, nous n'allons pas organiser une loterie… mais l'assemblée générale se profile. Elle aura lieu le samedi 9 novembre à 16h30 à l'EPFL. De plus amples informations sont disponibles sur http://ame.epfl.ch/ag.php.

Dans cette édition, vous trouverez un bref rapport des activités de l'AME. En effet, il nous semblait utile de diffuser ces informations de manière étendue.

Il me reste à vous souhaiter une bonne lecture, une bonne rentrée pour les uns ainsi qu'une excellente fin d'année à tous.

En espérant vous accueillir nombreux lors de l'assemblée générale,

Laurent Gorgé

Sommaire:

Rapport d'activités

L'année passée, les activités de l'association ont été les suivantes:

Contacts extérieurs:

- *Contact avec l'Institut de Mathématique (IMA) ainsi que la direction de l'EPFL*. Nous avons rencontré plusieurs membres de la direction de l'EPFL cette année pour nous assurer de leur soutien. Entre autres, le Professeur Aebischer a accepté d'écrire un mot de soutien pour notre brochure de présentation que nous envoierons aux entreprises afin de se faire connaître.
- *Contact avec l'Association Amicale des Anciens Etudiants de l'EPFL (A3E2PFL).* Les contacts avec l'A3 ont été moins fréquents que l'an passé. Ceci étant dû au fait que nous avons maintenant trouvé un accord et une entente mutuelle s'est installée dans nos relations. Le comité de l'A3 ayant tout récemment changé et bénéficiant maintenant d'un soutien plus important de la part de l'EPFL, il nous a paru judicieux de reprendre contact avec l'A3, ceci afin d'explorer à nouveau les synergies possibles (Notamment en ce qui concerne la gestion du fichier des membres).
- *Contact avec les organisations similaires (matériaux, électricité)*. Le comité a contacté ces associations pour leur proposer une rencontre. L'idée n'a pas été suivie par les autres associations..

Journal:

L'Association a déjà publié 9 éditions de son journal (Etats d'AME). Le journal est une activité stable de l'AME. Le comité encourage tous les membres et les personnes intéressées à soumettre leurs articles.

Séminaires:

Notre second séminaire à été organisé le 31 mai 2002. Ce dernier avait pour thème "les mathématiques et l'armée". 25 membres de l'AME ont ainsi eu la possibilité de faire la connaissance avec deux applications des mathématiques dans le monde militaire. Les intervenants étaient Professeur Albert A. Stahel de l'école de conduite militaire de Zürich et Dr Weissbaum, chef du groupe cryptologie de l'état major général. Le Professeur Albert A. Stahel a expliqué comment des équations différentielles pouvaient décrire la dynamique d'une guerre. Le Dr François Weissbaum a, quant à lui, esquissé l'univers des messages codés utilisés par les armées.

Suite en Page 4

Le paradoxe de Parrondo

Lancer une pièce de monnaie est un jeu dont le gain est déterminé par la probabilité qu'a la pièce de tomber sur pile ou face. Avec des pièces truquées on arrive à construire des jeux perdants. Néanmoins il est possible de combiner ces jeux perdants d'une façon aléatoire et ainsi obtenir un jeu gagnant. Ce résultat non-intuitif est appelé le paradoxe de Parrondo, dû à ce dernier, un physicien madrilène. Le paradoxe sert à expliquer, comment le caractère chaotique du mouvement brownien dans les cellules peut promouvoir l'évolution. Jusqu'à présent on pensait toujours que ce désordre empêchait toute amélioration des structures.

Supposons trois pièces de monnaie, p1, p2 et p3. Elles ont ½, ¾ et $^1/_{10}$ comme probabilité de gagner. Avec ces trois pièces on va construire deux jeux. Le premier est tout simple. Si c'est pile, avec une probabilité ½, on gagne un franc, si c'est face on en perd un. Le deuxième jeu est un peu plus compliqué. On lance la pièce p3 si le capital accumulé est un multiple de 3. Sinon on lance la pièce p2. Pour ces deux pièces aussi, on gagne un franc si le résultat est pile et on perd dans le cas contraire. Quel est le gain moyen de ce jeu? Pour calculer l'espérance du revenu du deuxième jeu on pourrait argumenter naïvement que la pièce p3 est lancée dans un tiers des cas et on aurait alors le résultat suivant: $\frac{2}{3}(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})+\frac{1}{3}(\frac{1}{10}-\frac{9}{10})=\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{1}{15}>0$. Le jeu serait donc gagnant. Cependant ce raisonnement est faux. Supposons que le gain accumulé est un multiple de 3. Alors la chance de perdre est beaucoup plus élevée que la chance de gagner. En revanche en jouant le suivant avec la pièce p2 on a beaucoup plus de chance de revenir à l'état initial que de perdre encore une fois. Il y aura donc plutôt des oscillations entre ces deux états et il est faux de dire qu'en moyenne on se trouve dans un tiers des cas dans l'état où le gain accumulé est un multiple de 3. Pour l'analyse exacte nous faisons appel à la théorie des chaînes de Markov. Supposons les trois états suivants: G mod 3 = 0, G mod 3 = 1 et G mod 3 = 2, où G est le gain accumulé. Avant nous avons parlé des états 0 et 2. La matrice des probabilités de transition est donnée par

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\pi}=P^t\vec{\pi}$$

Pour calculer le gain moyen il faut donc connaître la fréquence de passage par les états 0, 1 et 2, π_0, π_1 et π_2 respectivement. On sait que ce vecteur est un vecteur propre de *P* transposée. Ceci nous donne le résultat suivant: $\pi_0=\frac{5}{13}$. Ainsi le gain moyen du deuxième jeu est :

$$\frac{5}{13}(\frac{1}{10}-\frac{9}{10})+(1-\frac{5}{13})(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})=-\frac{40}{130}+\frac{8}{13}\frac{2}{4}=0\,.$$

Pour finir nous pouvons voir que le gain moyen du deuxième jeu est aussi égal à 0. Nous avons donc deux jeux justes.

En introduisant un petit biais ε on obtient des jeux perdants. En les alternant - par exemple deux tours du premier jeu et deux tours du deuxième jeu, - il paraîtrait logique que le jeu combiné soit encore perdant. Et c'est justement là que se situe le paradoxe de Parrondo. Avec un biais suffisamment petit on arrive à rendre le jeu combiné gagnant.

Explication:
Enlevons chez chaque pièce un biais ε très petit de la probabilité de gagner. Il est clair que les deux jeux deviennent perdants. Le gain moyen du premier jeu est maintenant ½-ε . La probabilité de gagner dans le deuxième jeu devient $\frac{1}{2}-\frac{147}{169}\varepsilon+\ldots$, le gain moyen est donc -$\frac{294}{169}\varepsilon$. Mais si on combine les deux jeux aléatoirement, la probabilité de jouer la troisième monnaie passe à

$\pi_0' = 245/709 - 48880/502681\,\varepsilon + \ldots$, ce qui est inférieur à π_0. La probabilité de gagner dans le deuxième jeu devient alors $\frac{1}{2}\pi_0'(\frac{1}{2}-\varepsilon+\frac{1}{10}-\varepsilon)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\varepsilon+\frac{3}{4}-\varepsilon) = 727/1418 - 486795/502681\,\varepsilon + \ldots$
Ce qui est, pour ε suffisamment petit supérieur à ½.

En combinant les deux jeux perdants il est donc possible d'obtenir un jeu gagnant. On voit aussi que pour $\varepsilon=0$ le gain est supérieur alors que les deux jeux séparément joués sont justes. On peu donc tirer du profit en combinant deux jeux sans espérance de gagner.

Comment ceci est-il possible? Cela peut s'expliquer de la manière suivante: Dans le deuxième jeu l'état 0 représente un véritable barrage, c'est très difficile de le traverser, alors que les deux autres états sont plutôt favorables à une augmentation du gain. Si maintenant on joue le premier jeu, quand on se trouve dans l'état 0, c'est beaucoup plus facile de passer à l'état 1 qu'avec le deuxième jeu. Si par contre on se trouve dans un des autres états, la probabilité de perdre est certes plus grande, mais ceci n'élimine pas encore les avantages dans l'état 0. Ainsi la combinaison des jeux casse la structure qui rend le deuxième jeu perdant.

Montrons maintenant encore un exemple en physique qui illustre ce paradoxe. Supposons une particule qui a comme différentes positions x les nombres entiers. On partage l'ensemble des positions possibles en trois états: x mod 3=0, x mod 3=1 et x mod 3=2. A chaque état un certain potentiel s'applique. V(0)=0, V(1)=1 et V(2)= ½ V. En plus de ce potentiel il y a une force dirigée F qui crée encore un potentiel xF. L'énergie à l'état x est donc E(x)=V(x mod 3)+xF. L'algorithme de Metropoli permet maintenant de déterminer les probabilités que la particule saute d'un état à un autre (il y a trois états). Ceci se fait grâce à la distribution de Boltzmann. Notons qu'en général la particule choisit l'état avec l'énergie la plus basse, d'où on conclût que la particule tombe en terme de valeur d'état. Ce processus correspond au deuxième jeu de Parrondo. A une température beaucoup plus élevée (dans un bain beaucoup plus chaud) les probabilités de sauter d'un état à un autre deviennent à peu près égales et le jeu ressemble au premier jeu de Parrondo. En alternant maintenant ces deux processus, en changeant la température (par exemple T1-T1-T2-T2 etc.) nous pouvons observer que pour des forces F petites la particule arrive à monter en x. Nous pouvons même calculer la chaleur qu'elle extrait du bain chaud et le rendement de ce moteur moléculaire. Ici la force F correspond au biais des jeux de Parrondo. Et à partir d'un certain F la particule n'arrive plus à franchir la montée énergétique et tout le processus devient perdant. Mais pour des petites forces F ce moteur marche. On présume que dans les cellules le transport de molécules fonctionne de cette manière. Toutes ces réflexions représentent une nouvelle assez révolutionnaire, parce que l'on a toujours cru que le mouvement brownien, cette instabilité permanente et non contrôlable, nuit à la bonne organisation au niveau biomoléculaire. Mais maintenant Parrondo est arrivé à montrer que tout le fonctionnement d'une cellule est probablement dû au mouvement brownien. Le mouvement brownien des particules peut aussi être utilisé pour construire une machine qui extrait de l'énergie d'un gaz, les brownian ratchets. Ce sont des pales qui tournent seulement dans un sens. Maintenant il peut arriver que les particules du gaz bombardent la pale plus dans une direction que dans l'autre. En moyenne il y a bien sûr le même nombre d'impacts avec la même force. Mais à un certain moment il peut y avoir une différence assez significative pour faire tourner la pale d'un cran. Si l'excès d'impact est dirigé dans le mauvais sens rien ne se passe. Cette construction est une idée assez vieille, mais ce n'est seulement qu'à la fin du vingtième siècle que l'on est arrivé à construire des tels moteurs assez petits et … ça marche. On arrive même à lever des poids.

Il y a des gens qui disent que toute l'évolution, que la vie n'aurait pas été possible sans le mouvement brownien. Et le paradoxe de Parrondo est probablement un morceau de la preuve de cette affirmation. Jusqu'à aujourd'hui on n'a pas encore trouvé une réalisation de ce paradoxe, mais on croit que ce paradoxe s'applique non seulement en biologie, mais aussi en physique et en économie, partout où il y a un phénomène de hasard. Il reste encore à ajouter que le paradoxe marche aussi dans le sens inverse, c'est à dire en combinant deux jeux gagnants on commence à perdre.

Ralph Villiger

Suite de la page 1

Bourse aux stages et projets:
Nous avons récemment étoffé notre offre en publiant deux offres d'emploi sur notre page web.

Brochure:
La brochure de présentation est maintenant complètement terminée. Le démarchage des entreprises a commencé. Les premiers résultats devraient intervenir au début de l'année à venir.

Parrainage:
Une première rencontre du parrainage à eu lieu, un peu avant le FORUM. Les contacts ont été positifs, mais nous remarquons encore des lacunes dans le concept. En effet, il semble que les étudiants n'ont pas encore l'habitude de contacter les professionnels.

Revue des statuts :
Nous avons entièrement revu les statuts de l'AME. Ils seront présentés pour acceptation lors de l'assemblée générale du 9 novembre 2002.

Amélioration de la page web :
Notre page Web à été amélioré tant au niveau du contenu que du contenant. Entre autres, nous avons mis à disposition des délégués de classe un outil leur permettant de planifier les examens oraux et de les mettre à disposition des étudiants. Nous travaillons à l'heure actuelle sur un accès limité, réservé aux membres.

Vitrine :
Une vitrine nous a été mise à disposition par l'IMA. Elle nous permet de présenter l'association et d'y afficher les dernières nouvelles.

Journée d'accueil :
L'AME était présente lors de la journée d'accueil 2001/2002. Nous avons pu ainsi présenter les activités de l'AME et établir un premier contact avec les nouveaux étudiants.

Notre vision du futur:
Pour l'année à venir, le comité compte réaliser les choses suivantes:

- Continuer l'édition du journal.
- Organiser de nouveaux séminaires.
- Relancer notre programme de parrainage.
- Impliquer plus les professionnels
- Contacter d'autres entreprises afin de faire connaître l'AME, de trouver des sujets de projets, de nouveaux intervenants pour nos séminaires.
- Continuer à intensifier les liens avec les étudiants afin de les convaincre de l'utilité de l'AME. Un effort particulier doit être effectué pour intéresser les étudiants à l'AME, car s'ils bénéficient de nos services, ils seront plus enclins à apporter leur contribution dans les années à venir.

Votre comité

Informations utiles

Vous pouvez nous contacter par mail à l'adresse suivante: ame@epfl.ch
Ou alors, vous pouvez contacter le président à l'adresse: laurent.gorge@swissonline.ch

Adresse : Association des Mathématiciens de l'EPFL, EPFL- DMA, 1015 Lausanne
Nous ne pouvons que vous encourager à faire un petit tour sur notre page web :

http://ame.epfl.ch